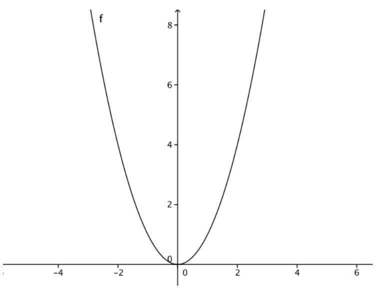
Klasse 9

Inhaltsverzeichnis

1 Quadratische Funktion

1.1 Normalparabel

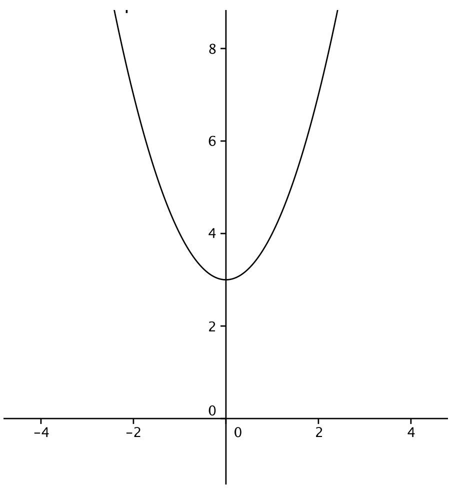


Die einfachste quadratische Funktion ist die Funktion $f(x) = x^2$.
Ihr Graph ist symmetrisch zur y-Achse und heißt Normalparabel und der Punkt $S(0|0)$ ist ihr Scheitelpunkt.

Wir untersuchen jetzt, wie sich die Funktionsgleichung ändert, wenn wir die Parabel im Koordinatensystem verschieben.

Verschiebung in y- Richtung

Wenn wir die Parabel um 3 Einheiten in y-Richtung verschieben sieht der Graph so aus:



Die Parabel ist immer noch symmetrisch zur y-Achse, aber ihr Scheitelpunkt hat sich geändert. Er liegt jetzt bei $S(0|3)$.

1.2 Verschiedene Formen einer quadratischen Funktion

Es gibt 3 Formen um die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion anzugeben:

- allgemeine Form $f(x) = ax^2 + bx + c$
- Nullstellenform $f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$
- Scheitelpunktform $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$

In diesem Kapitel werden die Vorteile der einzelnen Formen erklärt und wie man sie in einander umrechnet.

1.3 Die Scheitelform $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$

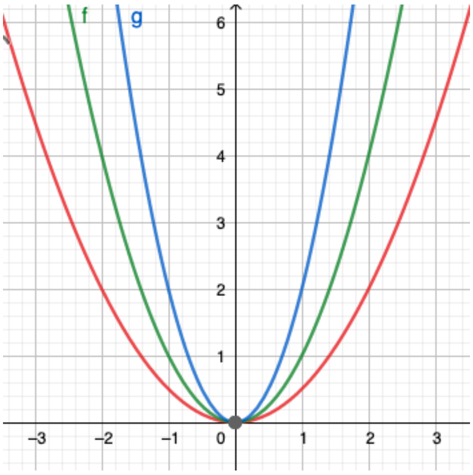
Wie der Name schon sagt, kann man an der Scheitelform den Scheitelpunkt ablesen. Der Scheitelpunkt lautet $S(x_0|y_0)$. Hierbei muss man darauf achten dass x_0 immer die Zahl hinter dem Minus in der Klammer ist. Dass heißt, wenn in der Klammer ein Minus steht ist x_0 positiv und wenn in der Klammer ein Plus steht, ist x_0 negativ. Der Faktor a ist der Streckfaktor und gibt an, ob die Parabel nach oben oder unten geöffnet ist. Wenn a positiv ist, ist die Parabel nach oben geöffnet. Ist a negativ, ist die Parabel nach unten geöffnet.

Merke:

Eine quadratische Funktion der Form $f(x) = a(x-x_0)^2+y_0$ heißt Scheitelpunktform. Der Graph ist eine Parabel mit Scheitel $S(x_0|y_0)$ und Streckfaktor a.

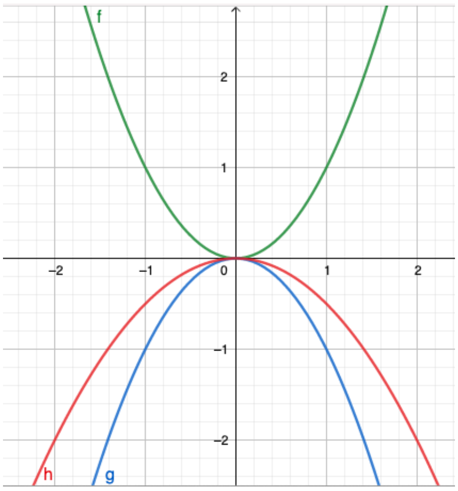
Sehen wir uns den Streckfaktor genauer an.

Beispiel 1



- Die grüne Parabel ist die Normalparabel mit Gleichung $f(x) = x^2$
- Die blaue Parabel ist schmaler als die Normalparabel und hat die Gleichung $g(x) = 2 \cdot x^2$
- Die rote Parabel ist breiter als die Normalparabel und hat die Gleichung $h(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$

Beispiel 2



- Die grüne Parabel ist die Normalparabel mit Gleichung $f(x) = x^2$
- Die blaue Parabel ist eine Normalparabel, die an der x-Achse gespiegelt wurde. Sie ist nach unten geöffnet. Ihre Gleichung lautet $g(x) = -x^2$
- Die rote Parabel ist breiter als die Normalparabel und siei ist nach unten geöffnet. Ihre Gleichung lautet $h(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2$

Merke:

Der Streckfaktor a gibt sowohl die Richtung der Öffnung als auch die Breite der Öffnung an. Die Öffnungrichtung kann man am Vorzeichen von a ablesen:

- a negativ: Parabel ist nach unten geöffnet.
- a positiv: Parabel ist nach oben geöffnet.

Ob die Parabel breiter oder schmaler als die Normalparabel ist kann man am Wert von a selbst erkennen:

- |a| =1: Der Graph ist eine Normalparabel.
- |a| >1: Der Graph ist um a gestreckt und somit schmaler als die Normalparabel.
- |a| <1: Der Graph ist um a gestaucht und somit breiter als die Normalparabel.

Beispiel 3

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2(x-4)^2 + 8$. Dann ist der Scheitelpunkt $S(4|8)$. Da $a = 2$ positiv ist, ist die Parabel nach oben geöffnet. Der Streckfaktor ist größer als 1, daher ist die Parabel schmaler als die Normalparabel.

b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^2 + 6$. Dann ist der Scheitelpunkt $S(-1|6)$. Da $a = -\frac{1}{3}$ negativ ist, ist die Parabel nach unten geöffnet. Der Streckfaktor ist vom Betrag her kleiner als 1, daher ist die Parabel breiter als die Normalparabel.

Aufgabe 1.1

Bestimme den Scheitelpunkt und die Öffnungsrichtung der Parabel:

a) $f(x) = 4(x-1)^2 + 2$

b) $f(x) = -2(x+6)^2 - 3$

c) $f(x) = \frac{1}{4}(x+5)^2 + 1$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$

e) $f(x) = 2,5(x-1,5)^2$

f) $f(x) = 4x^2 - 12$

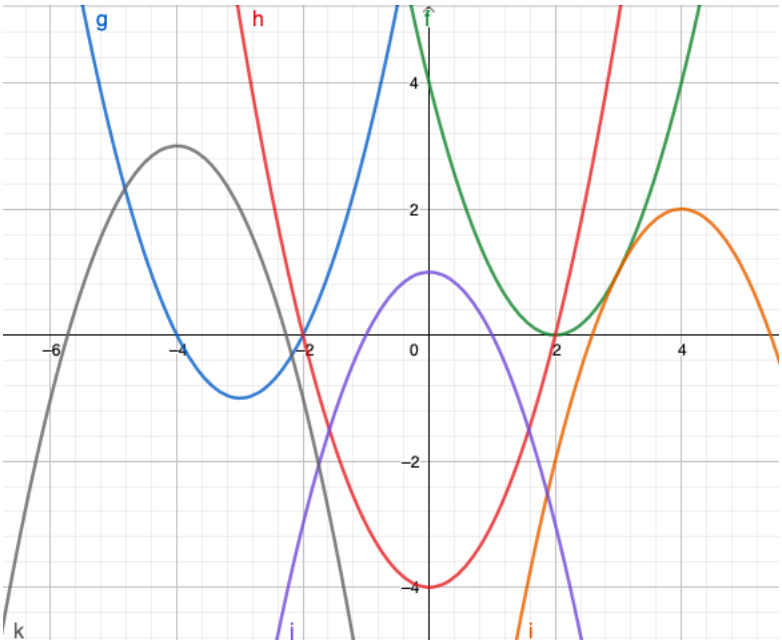
Aufgabe 1.2

Bestimme die Funktionsgleichung einer Normalparabel mit Scheitelpunkt S:

a) $S(1|9)$ **c)** $S(0|5)$ **e)** $S(-4|0)$

b) $S(-2|4)$ **d)** $S(\frac{1}{2}|-3)$ **f)** $S(7|\frac{3}{2})$

Aufgabe 1.3



Lies den Scheitelpunkt der Normalparabel am Graphen ab und stelle die Funktionsgleichung auf.

1.4 Allgemeine Form $f(x) = ax^2 + bx + c$

Wenn man die binomische Formel in der Scheitelform ausrechnet und den Funktionsterm zusammenfasst, erhält man die allgemeine Form einer quadratischen Funktion.

Beispiel 4

$f(x) = 2(x-3)^2 - 8$ (binomische Formel ausrechnen)

$\Leftrightarrow f(x) = 2(x^2 - 6x + 9) - 8$ (ausmultiplizieren)

$\Leftrightarrow f(x) = 2x^2 - 12x + 18 - 8$ (zusammenfassen)

$\Leftrightarrow f(x) = 2x^2 - 12x + 10$

Die Parabel schneidet die y-Achse im Punkt $S_y(0|10)$

Merke:

Eine quadratische Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ heißt allgemeine Form. Der Graph ist eine Parabel mit Streckfaktor a und schneidet die y-Achse bei $S_y(0|c)$.

- a negativ: Parabel ist nach unten geöffnet.
- a positiv: Parabel ist nach oben geöffnet.

Aufgabe 1.4

Forme die Scheitelform um in die Allgemeine Form und bestimme den y-Achsenabschnitt.

a) $f(x) = 4(x-1)^2 + 2$

b) $f(x) = -2(x+6)^2 - 3$

c) $f(x) = \frac{1}{4}(x+5)^2 + 1$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$

e) $f(x) = 2,5(x-1,5)^2$

f) $f(x) = 4x^2 - 12$

Was fällt dir bei der letzten Aufgabe auf?

$f(x) = 4x^2 - 12$ ist gleichzeitig die Scheitelform und die allgemeine Form. Da $x_0 = 0$ ist braucht man keine Klammer und der Scheitelpunkt $S(0|-12)$ ist gleichzeitig der y-Achsenabschnitt!

1.4.1 Quadratische Ergänzung

Der Weg von der allgemeinen Form in die Scheitelform ist etwas schwieriger. Wir müssen uns eine binomische Formel erzeugen ohne die Gleichung wirklich zu verändern. Diese Methode nennt man quadratische Ergänzung. Bevor man diese Methode anwenden kann, muss man den Faktor a ausklammern.

Beispiel 5

$f(x) = 2x^2 - 12x + 10$ (Zuerst wird der Streckfaktor $a = 2$ ausgeklammert)

$\Leftrightarrow f(x) = 2 \cdot (x^2 - 6x) + 10$ (± die Hälfte des Faktors vor x zum Quadrat)

hier ist der Faktor vor x gleich 6: Die Hälfte von 6 zum Quadrat ist 3^2

$\Leftrightarrow f(x) = 2 \cdot (x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + 10$

$x^2 - 6x + 3^2$ ist die zweite binomische Formel und kann auch so geschrieben werden: $(x-3)^2$

$\Leftrightarrow f(x) = 2 \cdot ((x-3)^2 - 3^2) + 10$

$\Leftrightarrow f(x) = 2 \cdot ((x-3)^2 - 9) + 10$ Äußere Klammer ausmultiplizieren

$\Leftrightarrow f(x) = 2 \cdot (x-3)^2 - 18 + 10$ zusammenfassen

$\Leftrightarrow f(x) = 2 \cdot (x-3) - 8$

Die Parabel hat den Scheitelpunkt $S(3|-8)$

1.5 Nullstellenform

Zur Erinnerung: Die Schnittpunkte eines Graphen mit der x-Achse heißen Nullstellen.

Merke:

Eine quadratische Funktion der Form $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ heißt Nullstellenform. Der Graph ist eine Parabel mit Streckfaktor a und schneidet die x-Achse bei $N_1(x_1|0)$ und $N_2(x_2|0)$.

Beispiel 6

Die Funktion $f(x) = 2 \cdot (x-1) \cdot (x+3)$ hat den Streckfaktor 2 und die Nullstellen $N_1(1|0)$ und $N_2(-3|0)$.

Aufgabe 1.5

Bestimme die Nullstellen:

a) $f(x) = 4(x+1) \cdot (x-2)$

b) $f(x) = -2(x+6) \cdot (x-3)$

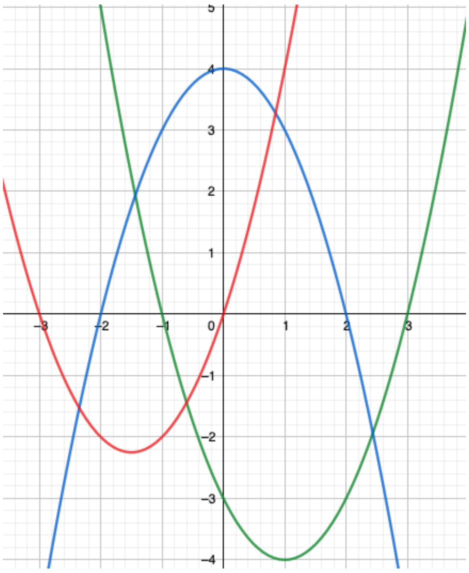
c) $f(x) = \frac{1}{4}(x+5) \cdot (x+8)$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1) \cdot (x-4)$

e) $f(x) = 2,5x \cdot (x-1,5)$

f) $f(x) = 4(x+7) \cdot (x-2,5)$

Aufgabe 1.6



Lies die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Normalparabel am Graphen ab und stelle die Funktionsgleichung auf. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Lage des Scheitelpunktes und den Nullstellen?

1.5.1 Von der Nullstellenform zur Scheitelform

Der Scheitelpunkt liegt immer auf der Symmetrieachse der Parabel. Das bedeutet die x-Koordinate muss genau mittig zwischen den Nullstellen sein.

Merke:

Die Parabel mit der Gleichung $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ hat den Scheitelpunkt $S(x_0|y_0)$ mit:

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$$

$$y_0 = a \cdot (x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)$$

Beispiel 7

Die Funktion $f(x) = 2(x - 4) \cdot (x - 8)$ hat die Nullstellen $N_1(4|0)$ und $N_2(8|0)$. Somit ist die x-Koordinate des Scheitels $x_0 = \frac{4+8}{2} = 6$. Die y-Koordinate des Scheitel ist der Funktionswert an der Stelle 6 und kann durch einsetzen von 6 in die Funktionsgleichung berechnet werden.

$y_0 = 2(6 - 4) \cdot (6 - 8) = 2 \cdot 2 \cdot (-2) = -8$

Der Scheitelpunkt lautet somit $S(6| - 8)$.

Aufgabe 1.7

Bestimme die Nullstellen und anschließend den Scheitelpunkt:

a) $f(x) = -2(x+4) \cdot (x-2)$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2}(x-5) \cdot (x+3)$ **e)** $f(x) = -2x \cdot (x-8)$

b) $f(x) = -3(x-6) \cdot (x-3)$ **d)** $f(x) = -\frac{1}{3}(x-1) \cdot (x-5)$ **f)** $f(x) = -4(x+1,5) \cdot (x-2,5)$

1.5.2 Von der Nullstellenform zur allgemeinen Form

Um eine Gleichung in Nullstellenform in eine Gleichung in allgemeiner Form umzurechnen, muss man lediglich die Klammern ausmultiplizieren.

Beispiel 8

Wir betrachten die Funktion $f(x) = 2(x-4) \cdot (x-8)$:

$\Leftrightarrow f(x) = 2 \cdot (x^2 - 8x - 4x + 32)$

$\Leftrightarrow f(x) = 2 \cdot (x^2 - 12x + 32)$

$\Leftrightarrow f(x) = 2x^2 - 24x + 64$

Aufgabe 1.8

Forme die Gleichung in die allgemeine Form um:

a) $f(x) = -2(x+4) \cdot (x-2)$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2}(x-5) \cdot (x+3)$ **e)** $f(x) = -2x \cdot (x-8)$

b) $f(x) = -3(x-6) \cdot (x-3)$ **d)** $f(x) = -\frac{1}{3}(x-1) \cdot (x-5)$ **f)** $f(x) = -4(x+1,5) \cdot (x-2,5)$

1.5.3 Von der Scheitelform zur Nullstellenform

Um eine Gleichung von der Scheitelpunktform in die Nullstellenform umzuwandeln, muss man zunächst die Nullstellen berechnen. Hierzu setzt man die Gleichung gleich Null.

Beispiel 9

Wir betrachten die Funktion $f(x) = 2(x-4)^2 - 18$:

$\Leftrightarrow 0 = 2(x-4)^2 - 18 \quad | + 18$

$\Leftrightarrow 18 = 2(x-4)^2 \quad | : 2$

$\Leftrightarrow 9 = (x-4)^2 \quad | \sqrt{}$

$\Leftrightarrow 3 = x - 4 \vee -3 = x - 4 \quad +4$

$\Leftrightarrow 7 = x \vee 1 = x \quad +4$

Die Nullstellen sind also $N_1(7|0)$ und $N_2(1|0)$. Der Streckfaktor kann in der Scheitelform abgelesen werden und ist in unserem Beispiel $a = 2$. Daraus ergibt sich die Nullstellenform: $f(x) = 2(x-7)(x-1)$

1.5.4 Von der allgemeinen Form zur Nullstellenform

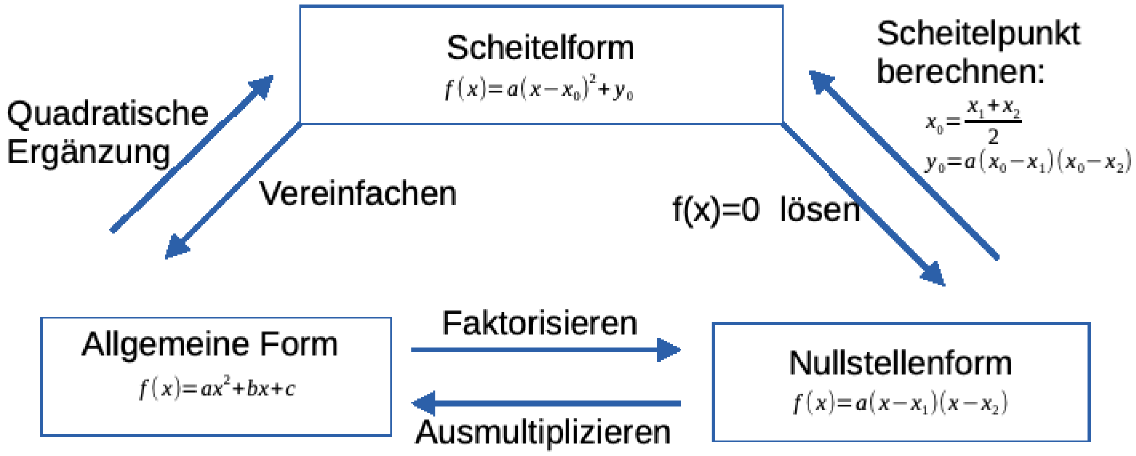
In einfachen Fällen kann man den Funktionsterm direkt Faktorisieren. Es gibt drei Möglichkeiten um einen Term zu Faktorisieren:

- Ausklammern
- Binomische Formeln rückwärts anwenden
- Satz von Vieta

Wenn diese Möglichkeiten nicht anwendbar sind, formt man die allgemeine Form zuerst mit Hilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelform um und wandelt dann die Scheitelform um in die Nullstellenform.

Der Satz von Vieta wird im folgenden Kapitel wiederholt.

1.5.5 Formen der quadratischen Funktion und wie man sie ineinander umformt



2 Quadratische Gleichungen

Merke:

Gleichungen deren höchster Exponent eine 2 ist heißen quadratische Gleichungen.

2.1 Gleichungen vom Typ $ax^2 + b = 0$

Merke:
Die einfachste quadratische Gleichung besteht nur aus einem Term mit x^2 und einer Zahl. Hierbei sorgt man dafür, dass x^2 alleine auf einer Seite der Gleichung steht und zieht dann die Wurzel.

Beispiel 10

$2x^2 - 8 = 0 \quad | + 8$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 8 \quad | : 2$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

Aufgabe 2.1

Berechne ebenso:

a) $3x^2 - 27 = 0$

b) $x^2 - 9 = 0$

c) $2x^2 - 6 = 0$

d) $-3x^2 + 64 = 0$

e) $\frac{1}{2}x^2 - 8 = 0$

f) $3x^2 = 75$

2.2 Gleichungen vom Typ $ax^2 + bx = 0$

Merke:
Besteht eine Gleichung aus einem Term mit x^2 und einem Term mit x, so kann man diese am Schnellsten durch ausklammern von x und anschließendem Anwenden des Nullproduktsatzes lösen.

Zur Erinnerung der Nullproduktsatz:

Merke:

Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

Beispiel 11

$x^2 - 8x = 0 \quad |\text{ x ausklammern}$

$\Leftrightarrow x \cdot (x - 8) = 0 \quad |\text{ Nullproduktsatz}$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x - 8 = 0 \quad | + 8$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$

2.3 Gleichungen vom Typ $ax^2 + bx + c = 0$

Es gibt 3 Methoden um solche Gleichungen zu lösen:

- Satz von Vieta
- Quadratische Ergänzung
- pq-Formel

Für jede dieser Methoden muss man die Gleichung zuerst auf Normalform bringen, indem man die ganze Gleichung durch a teilt.

2.3.1 Satz von Vieta

Merke:

Der Satz von Vieta:
Eine Gleichung der Form $x^2+px+q = 0$ kann man lösen, indem man die Gleichung faktorisiert. Dazu muss man zwei Zahlen x_1 und x_2 finden, die multipliziert q und addiert p ergeben. Dann läßt sich die Gleichung umschreiben in $(x + x_1) \cdot (x + x_2) = 0$ und mit dem Nullproduktsatz lösen.

Beispiel 12

$x^2 + 5x + 6 = 0$

Wir suchen zwei Zahlen die multipliziert 6 und addiert 5 ergeben!

Die Zahlen 2 und 3 erfüllen diese Bedingung, denn: $2 \cdot 3 = 6$ und $2 + 3 = 5$

Also können wir die Gleichung umschreiben in: $(x + 2) \cdot (x + 3) = 0$

Mit dem Nullproduktsatz ergibt sich dann:

$x + 2 = 0 \lor x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2 \lor x = -3$

Aufgabe 2.2

Berechne ebenso:

a)	$x^2 + 7x + 12 = 0$	**c)**	$x^2 + 3x - 10 = 0$	**e)**	$x^2 + 7x - 8 = 0$
b)	$x^2 + 6x + 5 = 0$	**d)**	$x^2 - 4x - 12 = 0$	**f)**	$x^2 + 14x + 24 = 0$

2.3.2 Quadratische Ergänzung

Läßt sich der Satz von Vieta nicht anwenden, gibt es noch andere Methoden um eine quadratische Gleichung zu lösen. Wir bringen mit Hife der quadratischen Ergänzung die linke Seite der Gleichung in die Form einer binomischen Formel.

Beispiel 13

$x^2 + 10x + 9 = 0$

Wir bringen zunächst das konstante Glied auf die rechte Seite der Gleichung:

$x^2 + 10x + 9 = 0 \quad | - 9$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x = -9$

Jetzt ergänzen wir die Gleichung so, dass eine binomische Formel ensteht. Hierzu addieren wir auf beiden Seiten **die Hälfte des Faktors vor dem x zum Quadrat**. Also

$\Leftrightarrow x^2 + 10x = -9 \quad | + 5^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 5^2 = -9 + 5^2$ Linke Seite: Binomische Formel rückwärts anwenden

$\Leftrightarrow (x + 5)^2 = 16 \quad$ | Wurzel ziehen

$\Leftrightarrow x + 5 = 4 \lor x + 5 = -4 \quad | - 5$

$\Leftrightarrow x = -1 \lor x = -9$

2.3.3 pq-Formel

Merke:

pq-Formel:

Die Lösungen x_1 und x_2 einer Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ lauten
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Beispiel 14

$x^2 + 10x + 9 = 0$

In diesem Beispiel ist $p = 10$ und $q = 9$, einsetzen in die Formel ergibt:

$x_{1,2} = -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 9}$

$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{5^2 - 9}$

$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 9}$

$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{16}$

$x_{1,2} = -5 \pm 4$

$x_1 = -5 + 4 \lor x_2 = -5 - 4$

$x_1 = -1 \lor x_2 = -9$

Aufgabe 2.3

Berechne ebenso:

a) $x^2 + 16x - 17 = 0$

b) $x^2 + 2x + \frac{3}{4} = 0$

c) $x^2 - 23x + 132 = 0$

d) $x^2 + 1x - 72 = 0$

e) $x^2 - 7x + 3,25 = 0$

f) $x^2 + \frac{9}{2}x + 2 = 0$

Aufgabe 2.4

Die folgenden Gleichungen müssen zuerst auf Normalform gebracht werden. Anschließend kannst du sie mit dem Verfahren deiner Wahl lösen.

a) $2x^2 + 8x + 8 = 0$

b) $3x^2 - 18x - 48 = 0$

c) $\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{9}{2} = 0$

d) $4x^2 + 12x + 5 = 0$

e) $2x^2 - 72x = 0$

f) $3x^2 + 3x = 6$